Soliton on Unstable Condensate

V.E. Zakharov[1,2,3] and A.A. Gelash[2]

[1]Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ, 857201, USA
[2]Novosibirsk State University
[3]Physical Institute of RAS, Leninskiy prospekt, 53, Moscow, 119991, Russia

15 сентября 2011 г.

Фокусирующее Нелинейное Уравнение Шрединера

Мы исследуем фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$i\varphi_t - \frac{1}{2}\varphi_{xx} - (|\varphi|^2 - A^2)\varphi = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями $|\varphi|^2 \to A^2$ при $x \to \pm\infty$. $A = \overline{A}$ является действительным числом.

Область применения уравнения

Нелинейная оптика (R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, 1964)

Теория волн в океане (В.Е. Захаров, 1968)

Физика плазмы (В.Е. Захаров, 1972)

Описание Бозе-конденсата (Е.П. Гросс и Л.П. Питаевский, 1961)

В 1971 г. В.Е. Захаровым и А.Б. Шабатом показана полная интегрируемость данного уравнения методом обратной задачи

Известные решения

Е.А. Кузнецов (1977 г.)
решение было "переоткрыто":
T. Kawata and H. Inoue (1978 г.)
Y-C Ma (1979 г.)

Перегрин (1983 г.)

Н.Н. Ахмедиев и В.И. Корнеев (1986 г.)

$\bar\partial$ - проблема для НУШ

НУШ (1) является условием совместности следующей переопределенной системы уравнений (Представление Лакса) на матричную функцию Ψ:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \widehat{U}\Psi, \quad i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\lambda\widehat{U} + \widehat{W})\Psi \qquad (2)$$

,где:

$$\widehat{U} = I\lambda + u$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\overline{\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{W} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\varphi|^2 - |A|^2 & \varphi_x \\ \overline{\varphi}_x & -|\varphi|^2 + |A|^2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$\bar\partial$ - проблема для НУШ

НУШ (1) имеет тривиальное решение в виде конденсата $\varphi = A$. Ему соответствует решение системы уравнений Лакса (2) Ψ:

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\begin{pmatrix} e^{\phi} & q\cdot e^{-\phi} \\ q\cdot e^{\phi} & e^{-\phi}\end{pmatrix} \qquad (4)$$

,где:

$$\phi = kx + \Omega t, \quad k^2 = \lambda^2 - A^2$$
$$\Omega = -i\lambda k, \quad q = -\frac{A}{\lambda + k}$$

отметим:

$$\overline{k}(-\overline{\lambda}) = -k(\lambda), \quad \overline{q}(-\overline{\lambda}) = -q(\lambda), \quad \overline{\phi}(-\overline{\lambda}) = \phi(\lambda)$$

$\overline{\partial}$ - проблема для НУШ

Мы рассматриваем $\overline{\partial}$-проблему в плоскости λ

$$\frac{\partial \chi}{\partial \overline{\lambda}} = \chi \cdot f(\lambda, \overline{\lambda}, x, t) \tag{5}$$

условие нормировки: $\chi \to 1$ at $|\lambda| \to \infty$
f-одевающая функция

$$f = \psi_0 f_0(\lambda, \overline{\lambda}) \psi_0^{-1} \tag{5}$$

можно показать, что:

$$f_0(\lambda, \overline{\lambda}) = f_0^+(\lambda, \overline{\lambda})$$
$$\chi^-(\lambda) = \chi^+(-\overline{\lambda})$$

Связь $\overline{\partial}$ - проблемы и решения НУШ

Асимптотическое разложение функции χ:

$$\chi = 1 + \frac{R}{\lambda} + \cdots \tag{4}$$

функция χ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \widehat{U}\chi - \chi \widehat{U_0} \\ i\frac{\partial \chi}{\partial t} &= (\lambda \widehat{U} + \widehat{W}) - \lambda \chi \widehat{U_0} \end{aligned} \tag{5}$$

данная система является переопределенной. Условие совместности:

$$\varphi = A - 2R_{(12)} \tag{6}$$

Солитонные решения

Удобно f_0 в виде:

$$f_0(\lambda, \overline{\lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(\lambda) \\ \overline{\alpha}(-\overline{\lambda}) & 0 \end{pmatrix}$$

в этом случае:

$$f(\lambda, \overline{\lambda}, x, t) = \alpha e^{2\phi} A + \overline{\alpha}(-\overline{\lambda}, -\lambda) B e^{-2\phi}$$

Матрицы A, B вырождены:

$$A_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta, \quad B_{\alpha\beta} = c_\alpha d_\beta$$

$$a = (1, q), \quad b = (-q, 1); \qquad c = (q, 1), \quad d = (1, -q)$$

Солитонные решения

Солитонным решениям соответствуют полюса одевающей функции:

$$\alpha(\lambda, \overline{\lambda}) = C\delta(\lambda - \eta)$$

Ищем решения в виде:

$$\chi = 1 + \frac{U}{\lambda - \eta} + \frac{V}{\lambda + \overline{\eta}} \tag{7}$$

Где U, V постоянные матрицы. Они также оказываются вырожденными:

$$U_{\alpha\beta} = u_\alpha b_\beta, \quad V_{\alpha\beta} = v_\alpha a^*_\beta$$

Солитонные решения

$\overline{\partial}$ - проблема приобретает вид:

$$\pi\{U\delta(\lambda-\eta)+V\delta(\lambda+\eta^*)\} = \{1+\frac{U}{\lambda-\eta}+\frac{V}{\lambda+\eta^*}\}\{\widetilde{A}\delta(\lambda-\eta)+\widetilde{B}\delta(\lambda+\eta^*)\} \quad (8)$$

В результате мы прихоим к системе уравнений в двух разных точках (η и $-\eta*$):

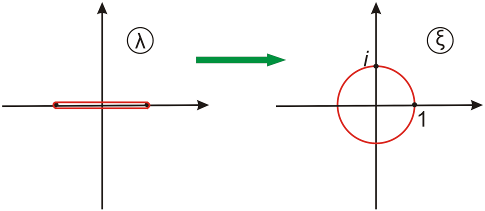
$$u_\alpha(1+\frac{q}{k}Ce^{2\phi}) - \frac{1+|q|^2}{\eta+\overline{\eta}}Ce^{2\phi}v_\alpha = a_\alpha Ce^{2\phi}$$
$$\frac{1+|q|^2}{\eta+\overline{\eta}}Ce^{2\overline{\phi}}u_\alpha + (1+\frac{\overline{q}}{\overline{k}}\overline{C}e^{2\overline{\phi}})v_\alpha = \overline{b}_\alpha\overline{C}e^{2\overline{\phi}}$$

Решения данной системы позволяют нам получить φ:

$$\varphi = A - 2(u_1 + v_1\overline{q})$$

Униформизация римановой поверхности

$$\lambda = \frac{A}{2}(\xi + \frac{1}{\xi}), \quad k = \frac{A}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})$$



$$\phi = \frac{1}{2}(æx - \gamma t) + i\frac{1}{2}(kx - \omega t)$$

$$k = A(R + \frac{1}{R})\sin(\alpha), \quad \omega = \frac{A^2}{2}(R^2 - \frac{1}{R^2})\cos(2\alpha)$$

$$æ = A(R - \frac{1}{R})\cos(\alpha), \gamma = -\frac{A^2}{2}(R^2 + \frac{1}{R^2})\sin(2\alpha)$$

Общее решение

В униформизованных переменных решение выглядит следующим образом:

$$\varphi = \frac{Ae^{2i\alpha}}{2}\left(\frac{2\cos(2\alpha)\cosh(u+w) - \frac{1}{a}(R^2+\frac{1}{R^2})\cos(v)}{\cosh(u+w)-\frac{1}{a}\cos(v)} + i\frac{2\sin(2\alpha)\sinh(u+w) + (R^2-\frac{1}{R^2})\sin(v)}{\cosh(u+w)-\frac{1}{a}\cos(v)}\right)$$

Здесь:

$$u = \phi + \phi^*, \quad v = \phi - \phi^*$$
$$a = \frac{1+R^2}{2R\cos(\alpha)}, \quad w = \ln(a) \tag{9}$$

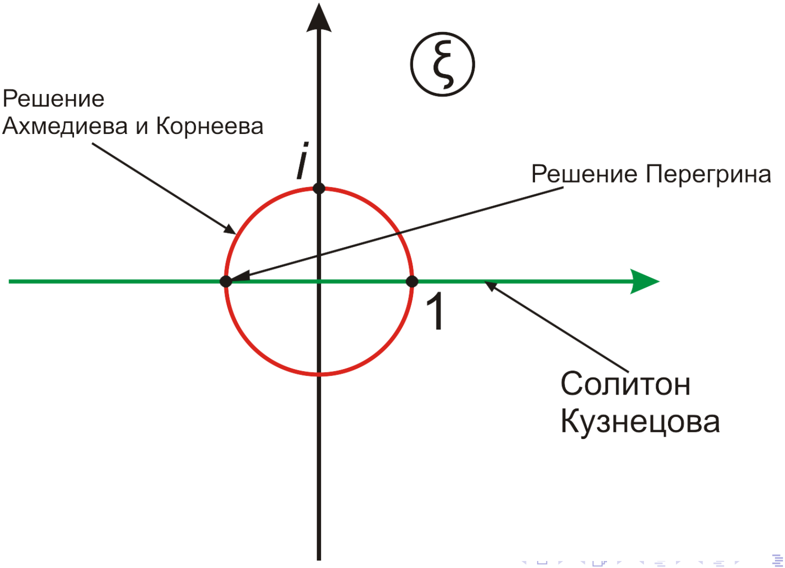
Асимптотическое поведение

Асимптотическое поведение решения:

$$
\begin{aligned}
\varphi \to A \quad & \text{при} \quad x \to -\infty \\
\varphi \to Ae^{4i\alpha} \quad & \text{при} \quad x \to +\infty \\
|\varphi|^2 = A^2 \quad & \text{при} \quad x \to \pm\infty
\end{aligned}
$$

Таким образом, в общем случае конденсат "приобретает фазу".

Частные решения



8

Спасибо за внимание!